Astrolabium

Konkurs astronomiczny

Orbita Hohmanna

Szkoła średnia

Klasy I – IV

Doświadczenie konkursowe 1

Rok 2019

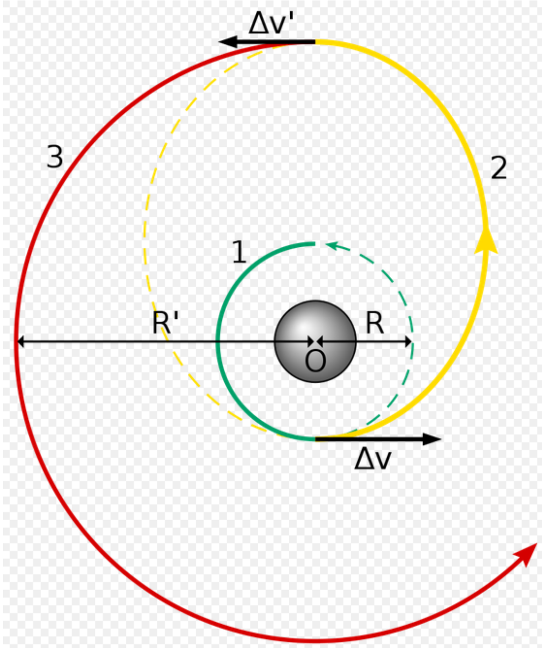
1. Wstęp teoretyczny

Podróże kosmiczne znacznie różnią się od podróży ziemskich. Na Ziemi podróżujemy między punktami o ustalonym położeniu, które można określić za pomocą współrzędnych geograficznych. W przypadku lotów kosmicznych cel podróży nieustannie zmienia swoje położenie. Drugą różnicą jest fakt, że podróże ziemskie odbywają się w pewnym środowisku (czy to na lądzie, czy w wodzie, czy w powietrzu), które cały czas oddziałuje z pojazdem. Oddziaływanie to może równie dobrze przeszkadzać w poruszaniu się (opór powietrza; wody; tarcie o podłoże), jak i pomagać (wiatr napędzający statek żaglowy; powietrze zasilające silniki spalinowe i odrzutowe; podłoże, od którego można odepchnąć się kołami, gąsienicami itd.). Loty kosmiczne odbywają się w próżni, a główną siłą napędzającą pojazd jest napęd rakietowy. Pojazd kosmiczny rozpędza się za pomocą odrzutu gazów wylotowych z dyszy, wykorzystując trzecie prawo Newtona[1]. Po wyłączeniu napędu rakieta będzie poruszać się po pewnej trajektorii ustalonej przez kierunek i wartość uzyskanej prędkości oraz przyciąganie grawitacyjne ciał (planet, księżyców, Słońca). Znając te czynniki, można obliczyć dokładne położenie pojazdu na trajektorii w dowolnej chwili czasu[2].

Do modyfikacji trajektorii lotu konieczne jest ponowne włączenie napędu rakietowego w ściśle określonej chwili. W praktyce podróż kosmiczna sprowadza się do szeregu krótkich impulsów rakietowych wprowadzających pojazd na określoną trajektorię. Należy dokładnie określić długość impulsów i czas, kiedy należy je wykonać. Zwykle oblicza się je jeszcze przed startem, by zaplanować, ile trzeba zabrać zapasów paliwa. Optymalną sytuacją jest, gdy osiągnięcie orbity docelowej wymaga możliwie mało i jak najkrótszych impulsów. Innymi słowy, inżynierom zatrudnionym w agencjach kosmicznych zależy, żeby suma zmian prędkości pojazdu podczas wszystkich odpaleń silnika rakietowego (tak zwana **delta-v, Δv**) była jak najmniejsza.

Rozwiązanie tego problemu przedstawił w 1925 roku niemiecki matematyk Walter Hohmann. Podał on założenia manewru przejścia pojazdu kosmicznego z orbity niższej na wyższą, wykorzystując eliptyczną trajektorię pośrednią. Od jego nazwiska tę trajektorię nazwano **trajektorią Hohmanna** (lub inaczej **orbitą transferową Hohmanna**). Jej schemat przedstawiony jest na poniższym rysunku.

[1] mówi ono o tym, że w przypadku oddziaływania dwóch ciał siła działająca na jedno zrównuje się z siłą działającą na drugie, ale z przeciwnym zwrotem
[2] w praktyce są to obliczenia numeryczne o przybliżonej dokładności



Rysunek 1. Schemat manewru transferowego Hohmanna. Orbita niższa (1) o promieniu R zaznaczona jest kolorem zielonym, a wyższa (3) o promieniu R’ - kolorem czerwonym. Transferową trajektorię Hohmanna (2) zaznaczono kolorem żółtym. Wektory zmiany prędkości wskazują miejsca, gdzie należy włączyć silnik rakietowy. Źródło: Wikipedia[3].

Załóżmy, że pojazd znajduje się na niskiej orbicie o promieniu R wokół ciała centralnego[4]. Celem podróży jest dostanie się na orbitę wyższą o promieniu R’. Pojazd kosmiczny powinien w odpowiedniej chwili odpalić silniki rakietowe w kierunku ruchu po orbicie, nadając pojazdowi impuls prędkości *Δv.* Impuls ten wyrzuci pojazd na eliptyczną orbitę transferową, której półoś wielka dana jest wzorem:

$$a = \frac{R + R'}{2}$$

Orbita Hohmanna jest styczna w najniższym punkcie do orbity początkowej, a w najwyższym punkcie - do orbity docelowej pojazdu. Gdy rakieta dotrze do najwyższego punktu orbity transferowej, musi jeszcze nabrać prędkości, by znaleźć się na zaplanowanej orbicie. W tym celu wykorzystuje się kolejny impuls zaznaczony jako *Δv’* na Rysunku 1. Aby policzyć impulsy *Δv i Δv’*, od prędkości pojazdu kosmicznego na danej orbicie należy odjąć **Pierwszą Prędkość Kosmiczną** daną wzorem:

$$v_I = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

gdzie *G* jest stałą grawitacji, *M* – masą centralnego ciała, a *r* odpowiada promieniowi orbity. W naszym przykładzie jest to *R* dla orbity niższej i *R’* dla orbity wyższej.

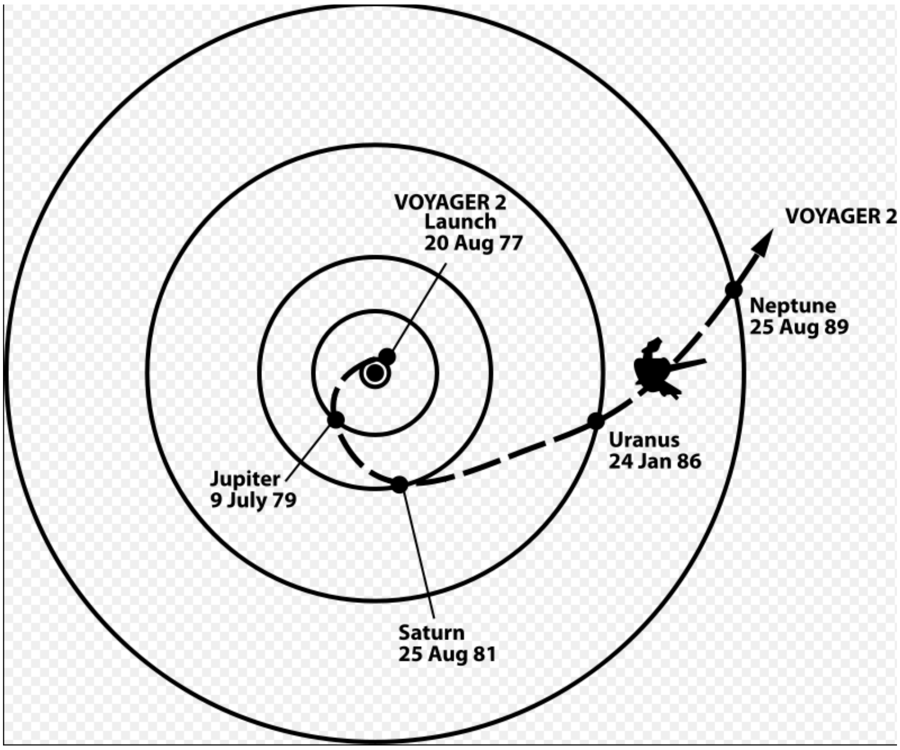
[3] https://en.wikipedia.org/wiki/Hohmann_transfer_orbit#/media/File:Hohmann_transfer_orbit.svg
[4] dla uproszczenia można założyć, że wszystkie orbity ułożone są w jednej płaszczyźnie. Nie jest to jednak warunek konieczny

W przypadku, gdy cel podróży porusza się bliżej ciała centralnego niż pojazd, sytuacja odwraca się. Rakieta musi zejść z wysokiej orbity na orbitę transferową za pomocą impulsu Δv skierowanego **przeciwnie** do kierunku lotu. Po dotarciu w najniższy punkt orbity transferowej wyhamować za pomocą impulsu Δv również skierowanego przeciwnie do kierunku lotu. Sytuacja taka jest typowa dla podróży między planetami (np. Ziemią a Wenus), kiedy to ciałem centralnym jest Słońce.

Przykład podróży międzyplanetarnych jest bardziej skomplikowany, ponieważ przyciąganie grawitacyjne planet zaczyna odgrywać istotną rolę. Startując z rejonu, gdzie dominuje przeciąganie Ziemi, należy pokonać **Drugą Prędkość Kosmiczną** i to ona będzie determinować wielkość impulsu Δv:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Pola grawitacyjne planet znajdujących się w pobliżu trajektorii lotu rakiety mogą zostać wykorzystane, by zyskać dodatkową prędkość. Manewr ten nazywamy **asystą grawitacyjną**. Bezzałogowa sonda kosmiczna Voyager 2 korzystała kilkakrotnie z asysty grawitacyjnej mijanych planet, by przyspieszyć swoją podróż przez Układ Słoneczny. Schemat trajektorii Voyagera 2 wraz z planetami wykorzystanymi do asysty grawitacyjnej przedstawia Rysunek 2.



Rysunek 2. Schemat podróży sondy Voyager 2. Źródło: Wikipedia[5].

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Voyager_2#/media/File:Voyager_2_path.svg

2. Cel doświadczenia

Celem doświadczenia jest zapoznanie się z podstawowym pojęciem mechaniki lotów kosmicznych i obliczenie parametrów trajektorii podróżnej w kilku przypadkach: podróży na orbitę geostacjonarną, na Księżyc oraz na planety Układu Słonecznego.

3. Opis wykonania doświadczenia

Pierwsze zadanie polega na wyprowadzeniu wzorów na parametry transferu Hohmanna pomiędzy dwiema kołowymi, współpłaszczyznowymi orbitami o promieniach r_1 i r_2 wokół ciała centralnego o masie M. Szukane parametry to: wielkość impulsów Δv i $\Delta v'$ oraz czas transferu t.

Oznaczmy prędkości pojazdu (o masie próbnej m) w najniższym i najwyższym punkcie orbity transferowej jako v_1 i v_2. Z zasady zachowania momentu pędu wynika: $mv_1r_1 = mv_2r_2$. Podobnie stosując zasadę zachowania energii, zachowana jest całkowita energia (suma energii potencjalnej i kinetycznej) w czasie lotu po orbicie transferowej:

$$\frac{GMm}{r_1} + \frac{mv_1^2}{2} = \frac{GMm}{r_2} + \frac{mv_2^2}{2}$$

Czas t potrzebny na podróż po orbicie transferowej można wyliczyć za pomocą trzeciego prawa Keplera. Mówi ono, że w przypadku obiegu ciała po orbicie eliptycznej, sześcian wielkiej półosi (połowa osi wielkiej) orbity a jest proporcjonalny do kwadratu okresu obiegu T: $a^3 \sim T^2$.

Po wyprowadzeniu wzorów na v_1 i v_2, rozważmy trzy przypadki graniczne dla:
- $r_2 \to \infty$
- $r_2 \to 0$
- $r_2 \to r_1$

Jak można je zinterpretować?

Drugie zadanie polega na wykorzystaniu wyprowadzonych wzorów w celu wyliczenia parametrów **orbity geostacjonarnej**. Jest to szczególna orbita kołowa położona w płaszczyźnie równika. Orbita geostacjonarna jest bardzo użyteczna dla satelitów komunikacyjnych i meteorologicznych, jako że pozostają one „zawieszone” nad tym samym punktem na Ziemi. Satelity poruszające się po tej orbicie mają okres obiegu równy okresowi obrotu Ziemi wokół osi, tj. nieco mniej niż 24 godziny[6]. Przyjmijmy jednak wartość dokładnie 24 godziny. Niska orbita okołoziemska na wysokości 270 km nad powierzchnią Ziemi (do tej wartości należy dodać promień Ziemi wynoszący średnio 6370 km) ma okres obiegu 90 minut. Znajdź promień orbity geostacjonarnej i prędkość satelity na tej orbicie $v_{geostac}$ oraz parametry orbity transferowej Hohmanna, która przechodzi z niskiej orbity parkingowej o promieniu 270 km nad powierzchnią Ziemi położonej w

[6] okres obrotu Ziemi, tj. średni okres pomiędzy kolejnymi górowania mi Słońca, jest nieco mniejszy niż 24 godziny ze względu na ruch Ziemi wokół Słońca

płaszczyźnie równika na orbitę geostacjonarną.
Podpowiedź: Zamiast wyliczać skrupulatnie ze wzoru prędkości na podstawie stałej grawitacji i masy ciała centralnego, można porównać prędkości na orbitach z Pierwszą Prędkością Kosmiczną, obliczając jedynie jak zmienia się czynnik zależny od r_1 *i* r_2.

Kolejne zadanie to wyznaczanie parametrów orbity transferowej w kierunku Księżyca. Przyjmijmy, że Księżyc porusza się po orbicie kołowej o promieniu 384 400 km, a startujemy z orbity parkingowej na wysokości 270 km nad powierzchnią Ziemi, tym razem położonej w płaszczyźnie orbity Księżyca. Załóżmy również, że nie interesuje nas miękkie lądowanie, a chcemy jedynie rozbić sondę o powierzchnię Księżyca (jak to zrobiono z radziecką sondą Łuna 2 w 1959 roku). Nie musimy więc obliczać drugiego impulsu $\Delta v'$. Pomińmy też przyciąganie samego Księżyca.

W ostatnim zadaniu opuścimy okolice Ziemi i zajmiemy się zagadnieniem lotów międzyplanetarnych. Załóżmy, że nasza orbita parkingowa 270 km nad powierzchnią Ziemi położona jest w płaszczyźnie ekliptyki, w której krążą po orbitach kołowych wszystkie planety. Ziemia okrąża Słońce w odległości około 1 jednostki astronomicznej (1 AU) w ciągu około 365 dni z prędkością ok. 30 km/s. Teraz należy obliczyć parametry orbity transferowej w kierunku poszczególnych planet Układu Słonecznego:

- Merkurego (promień orbity 0,4 AU)
- Wenus (promień orbity 0,7 AU)
- Marsa (promień orbity 1,5 AU)
- Jowisza (promień orbity 5,2 AU)
- Saturna (promień orbity 9,5 AU)
- Urana (promień orbity 19,2 AU)
- Neptuna (promień orbity 30 AU).

Należy wyliczyć czas potrzebny na transfer oraz wielkość pierwszego impulsu. Podobnie jak w przypadku Księżyca zakładamy jedynie przelot w pobliżu planety, pomijamy zatem drugi impuls. W przypadku lotów międzyplanetarnych, pierwszy impuls należy obliczyć nieco inaczej. Wyliczamy impuls Δv tak, jakbyśmy startowali bezpośrednio z orbity o takich samych parametrach jak orbita Ziemi. Trzeba jednak uwzględnić energię potrzebną do wydostania się z rejonu, w którym dominuje przyciąganie Ziemi, czyli pojazd musi osiągnąć Drugą Prędkość Kosmiczną. Prędkość transferowa na międzyplanetarnej orbicie Hohmanna wynosi zatem:

$$v_{transfer}^2 = \Delta v^2 + v_{II}^2$$

Aby obliczyć niezbędny impuls Δv, należy od $v_{transfer}$ odjąć Pierwszą Prędkość Kosmiczną v_I.

Porównaj czas potrzebny na transfer po bezpośredniej orbicie Hohmanna ku planetom zewnętrznym z przebiegiem misji sondy Voyager 2:

- Start: 20 sierpnia 1977
- Przelot obok Jowisza: 9 lipca 1979

- Przelot obok Saturna: 25 sierpnia 1981
- Przelot obok Urana: 24 stycznia 1986
- Przelot obok Neptuna: 25 sierpnia 1989.

Co wynika z tego porównania? Jakie korzyści dało wykorzystanie manewru asysty grawitacyjnej w przypadku sondy Voyager 2?

Rysunek 2. Sonda Voyager 2. Źródło: Wikipedia[7].

[7] https://pl.wikipedia.org/wiki/Voyager_2#/media/File:Voyager.jpg